

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ (μέχρι τώρα)

$$\frac{d p_n(t)}{dt} + (\lambda_n + \mu_n) P_n(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t)$$

$$\frac{d p_0(t)}{dt} + \lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t) \quad n=0$$

Οριστικές πιθανότητες

$$\bar{P}_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \bar{P}_0 \quad \text{όπου} \quad \bar{P}_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \right]^{-1}$$

Διαδικασία γεννήσεων - Διαδικασία Poisson.

Ισχύει $\lambda_n = \lambda \quad n=0,1,2,\dots$ με $P_0(0) = 1$.
 $\mu_n = 0$

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \quad n=0,1,2,\dots \quad (\text{Poisson κατανομή})$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Πόρισμα

(σελ 33 σημειώσεων PDF)

Σε μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ οι τ.μ $T_0, T_1, \dots$ που παριστάνουν το χρόνο ανάμεσα σε δυο διαδοχικά γεγονότα είναι ανεξ. και ακολουθούν εκθετική με παράμετρο λ .

Παρατήρηση

(σελ 36) Από οποιοδήποτε σημείο και αν εξετάσουμε τη διαδικασία Poisson, το χρονικό διάστημα μέχρι την επόμενη άφιξη έχει την ίδια κατανομή με το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων

Διαδικασία θανάτων.

Ισχύει $\lambda_n = 0 \quad n=1, 2, \dots$

$$\mu_n = \mu \quad n=1, 2, \dots, M$$

$$P_{M-n}(t) = \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!}, \quad n=0, \dots, M-1$$

$$P_M(t) = e^{-\mu t}, \quad n=M$$

$$P_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^M (\mu t)^i e^{-\mu t} / i!$$

$$\Pi_n(s) = \frac{1 - \beta(s)}{s} \beta^n(s) \quad \text{μετασχ. Laplace } P_n(t)$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n} P_0 = \rho^n P_0 \quad n=1, 2, \dots \quad (\text{πρέπει να φέρω απόδειξη})$$

$$P_0 = \left[\frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} = 1-\rho \quad \text{όπου } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = (1-\rho) \rho^n \quad n \geq 1$$

Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα.

$$EW = L = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \rho < 1$$

Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad \rho < 1$$

Χρόνος αναμονής

$$f_{n+1}(w) = f_{n+1}^I(w) + f_{n+1}^{II}(w)$$

$$f_{n+1}(w) = \mu e^{-\mu w} \int_{t=0}^{+\infty} \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda t} f_n(x) dx dt + \lambda \mu \int_{t=0}^{+\infty} \int_{u=0}^w e^{-\lambda t} e^{-\mu u} f_n(t-u+w) du dt$$

Χρόνος αναμονής στατικής ισορροπίας

σ.π.π $f(w) = \mu e^{-\mu w} (1-p) e^{\mu p w}$

$\Rightarrow$

$$f(w) = \mu(1-p) e^{-\mu(1-p)w}, w > 0$$

Μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα (στατική ισορροπία)

$$Ew = \frac{1}{\mu(1-p)}$$

Μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά

$$Ew_q = \frac{p}{\mu(1-p)}$$

Σε ένα υπολογιστικό σύστημα, ο χρόνος επεξεργασίας
ανά εργασία είναι εκθετικά κατανομημένος με μέση τιμή 3 sec.

Οι εργασίες φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson
με μέσο ρυθμό μια εργασία κάθε 4 sec.

και εξυπηρετούνται με πειθαρχία FCFS

Ζητούνται: πιθανότητα ο χρόνος απόκρισης (εξυπηρ) μιας εργασίας
να ξεπερνά τα 20 sec και ο μέσος αριθμός εργασιών
σε αναμονή σε κατάσταση στατικής ισορροπίας.

Αποφασίστηκε ότι όταν ο φόρτος εργασίας φθάσει σε επίπεδο
τέτοιο ώστε ο μέσος χρόνος απόκρισης να γίνει 30 sec.

Θα πρέπει να αυξηθούν οι δυνατότητες του συστήματος.

Κατά πόσο θα έχει αυξηθεί ο σημερινός ρυθμός αφίξεων
όταν θα συμβεί αυτό;

Απ

Χρόνος επεξ. ανά εργασία είναι εκθετικός.

$$E_{\text{κθ}}(\mu) \text{ όπου } \mu = \frac{1}{3} \left(\text{διότι } \int \mu e^{-\mu x} x dx = \frac{1}{\mu} = 3 \text{ sec} \right)$$

1 εργασία / 4 sec ακολουθεί Poisson (λ)

$$\text{Άρα } \lambda = \frac{1}{4} \text{ εργ/sec.}$$

$$\text{όμως } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} < 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{πυκν. κυκλοφορίας} \\ \text{έχω M/M/1/∞ σύστημα} \\ \text{και θέλω } \rho < 1 \end{array} \right)$$

$$P(\text{χρόνος απόκρισης σε στατική ισόρρο} > 20 \text{ sec}) = P(\text{χρόνος αναμονής σε καύση στατικής ισόρρο} > 20 \text{ sec})$$

$$= \int_{w=20}^{+\infty} \sigma \pi \pi * \text{χρόνος αναμονής} dw$$

$$= \int_{20}^{+\infty} \mu(1-p) e^{-\mu(1-p)w} dw$$

Θέλει απόδειξη

$$= 1 - F_{\text{εκθ}}(20) = e^{-\mu(1-p) \cdot 20}$$

$$= e^{-\frac{1}{3}(0,25) \cdot 20} = 0,1889$$

$$L_q = E z = \frac{p^2}{1-p} = \dots = 2,25 \text{ εργασίες.}$$

Θέλει απόδειξη

$$E_{\text{εκθ}}(\mu(1-p))$$

$$\frac{1}{\mu(1-p)} = \frac{1}{\mu-\lambda} = 30$$

το μ είναι ίδιο
ψάχνω να βρω το $\lambda = ?$

Καίω πράξεις και καταλήγω στο συμπέρασμα
ότι $\lambda = 0,3$

(Παρατηρώ αύξηση 20%) από 0,25 $\rightarrow$ 0,3.

ΑΣΚΗΣΗ (Παράδειγμα 3.3 σελ 47)

Σε ένα κέντρο μεταγωγής μηνυμάτων ο μέσος ρυθμός αφίξεων σε μια επικοινωνιακή γραμμή είναι 240 μνμ/λεπτό

Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ενός μνμ είναι 0,22 δευτ.

Να βρεθεί 1) ο μέσος αριθμός μνμ στο σύστημα.

2) ο μέσος αριθμός μνμ στην ουρά

3) μέσος χρόνος παραμονής μνμ στο σύστημα.

4) μέσος χρόνος αναμονής μνμ

Ποιαί η πιθανότητα να περιμένουν στην ουρά τουλάχιστον 10 μνμ [σε κατάσταση στατικής ισορροπίας].

Απ

240 μνμ/λεπτό

$$0,22 \text{ δευτ} = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{1}{0,22} \text{ sec.}$$

$$\frac{240 \mu\text{νμ}}{?} \quad \frac{60 \text{ sec}}{1 \text{ sec}}$$

$$4 \mu\text{νμ/sec} \rightarrow \text{Άρα } \lambda = 4$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,88$$

M/M/1/∞

1) μέσος αριθμός μνμ στο σύστημα
πελατών

$$Ew = L = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \checkmark \text{ Θέλει απόδειξη} = \dots = 7,33 \mu\text{νμ.}$$

2) μέσος αριθμός μνμ στην ουρά

$$Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad \checkmark \text{ Θέλει απόδειξη} = \dots = 6,45 \mu\text{νμ.}$$

3) μέσος χρόνος παραμονής μνμ στο σύστημα

$$\checkmark \text{ Θέλει απόδ} \rightarrow Ew(\mu(1-\rho)) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \dots = 1,83 \text{ sec}$$

4) μέσος χρόνος αναμονής μνμ

$$EW_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \dots = 1,61 \text{ sec.}$$

$$P(\text{να περιμένουν} \\ \text{τουλάχιστον 10 μνμ}) = P(\text{αριθμός μνμ} \\ \text{στο σύστημα} \geq 11)$$

↓ θέλει απόδειξη

$$= \sum_{n=11}^{+\infty} P_n = \sum_{n=11}^{+\infty} (1-\rho) \rho^n = (1-\rho) \sum_{n=11}^{+\infty} \rho^n$$

$$\xrightarrow{n-11=j} (1-\rho) \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^{j+11} = (1-\rho) \rho^{11} \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^j$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = (1-x)^{-1}$$

$$\underline{\underline{= \rho^{11} (1-\rho) (1-\rho)^{-1} = \rho^{11} = 0,245}}$$

Περίοδος (χρόνος) συνεχούς απασχόλησης του υπαλλήλου εξυπηρέτησης
 $M/M/1/\infty$ ($F_c F_s$)



— κενός χρόνος

~ χρόνος συνεχούς εργασίας.

Μια περίοδος συνεχούς απασχόλησης του υπαλλήλου ορίζεται σαν την χρονική περίοδο που αρχίζει από τη στιγμή που το σύστημα είναι άδειο και κάποιος πελάτης έρχεται και τελειώνει τη στιγμή που κάποιος πελάτης φεύγει και αφήνει το σύστημα πάλι άδειο.

Έστω T η ζ.μ. που παριστάνει το χρόνο (περίοδο) συνεχούς απασχόλησης του υπαλλήλου.

Η T είναι συνεχής ζ.μ.

Συμβολίζουμε $k(t)$ την σπη της ζ.μ. T

$$k(t) dt = P[t < T \leq t + dt] = P \left[\begin{array}{l} \text{Τη χρονική στιγμή } t \\ \text{να υπάρχει ένας πελάτης} \\ \text{στο σύστημα και στο} \\ (t, t+dt) \text{ να φεύγει} \end{array} \right]$$

(t ο χρόνος συνεχούς απασχόλησης $\leq t+dt$)

Είχα συμβολ $\rightarrow f(t)$: αριθμός πελατών στο σύστημα

Έστω επίσης $f'(t)$ η ζ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα κατά τη διάρκεια της περιόδου T .

Τότε $f'(t) > 0 \quad \forall t \in T$

$f'(0) = 1$ γιατί κατά τη διάρκεια της περιόδου T το σύστημα είναι "γεμάτο" (δηλ έχει πελάτες) ενώ όταν ξεκινά δεν έχει πελάτη (άδειο).

Το παραπάνω προέκυψε αμέσως από τον ορισμό της T

$$\text{Τότε } k(t)dt = [\mu dt + o(dt)] P[J'(t)=1/J'(0)=1]$$

✓
Πως προέκυψε?

Είναι η πιθανότητα
να έχω ένα "θάνατο"
σε χρόνο dt

(θέλω αναχώρηση
πελάτη στο $(t, t+dt)$)



Ποιά πιθανότητα είναι?

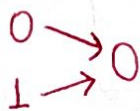
Η πιθανότητα στο t να έχω
1 πελάτη δαθέντος ότι
αρχικά το σύστημα είναι αδειο.

Συμβολίζω με $q_1(t) = P[J'(t)=1/J'(0)=1]$

και γενικά $q_n(t) = P[J'(t)=n/J'(0)=1]$

Τότε η παραπάνω σχέση είναι:

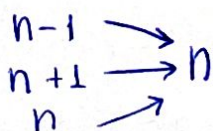
$$k(t)dt = q_1(t) [\mu dt + o(dt)]$$



λόγω της αρχικής μας συνθήκης.

$$q_0(t+dt) = q_0(t) \cdot 0 + q_1(t) [\mu dt + o(dt)]$$

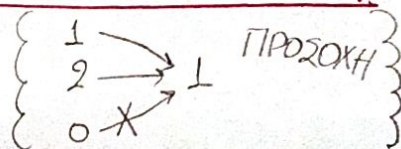
Για $n=2,3,4$



Για $n=1$ γιατί δεν ισχύει?

Αν
Δεν ισχύει διότι:

Δεν μπορεί $0 \rightarrow 1$



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Πως μπορώ να έχω n πελάτες στο σύστημα στο $t+dt$;

Είτε είχα n στο t και δεν συνέβη τίποτα σε χρόνο dt

Είτε είχα $n+1$ στο t και σε χρόνο dt έγινε "αναχώρηση"

Είτε είχα $n-1$ στο t και σε χρόνο dt έγινε "αίφιξη"

[γιαυτό το λόγο πήρα]
[ξεχωριστά το 0]

$$q_n(t+dt) = q_{n+1}(t) [\mu dt + O(dt)] + q_{n-1}(t) [\lambda dt + O(dt)] + q_n(t) [1 - (\lambda + \mu)dt + O(dt)]$$

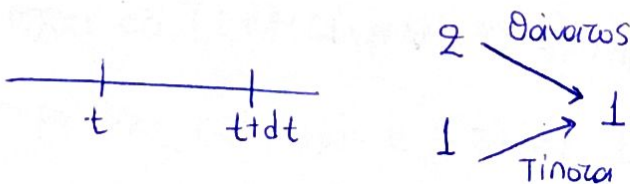
$$\text{Από } q_0(t+dt) = q_0(t) + q_1(t) [\mu dt + O(dt)]$$

$n=2,3,4,\dots$

Προκύπτει
(διαίρω με dt) $\frac{dq_0(t)}{dt} = \mu q_1(t)$

$$\frac{dq_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu) q_n(t) = \mu q_{n+1}(t) + \lambda q_{n-1}(t) \quad n=2,3,4$$

Τι συμβαίνει για $n=1$?



$$q_1(t+dt) = q_2(t) [\mu dt + O(dt)] + q_1(t) [1 - (\lambda + \mu)dt + O(dt)]$$

Προκύπτει:
(διαίρω με dt) $\frac{dq_1(t)}{dt} + (\lambda + \mu) q_1(t) = \mu q_2(t)$

Άρα έχουμε ότι:

$$\begin{cases} \frac{dq_0(t)}{dt} = \mu q_1(t) & n=0 \\ \frac{dq_1(t)}{dt} + (\lambda + \mu) q_1(t) = \mu q_2(t) & n=1 \\ \vdots \\ \frac{dq_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu) q_n(t) = \mu q_{n+1}(t) + \lambda q_{n-1}(t) & n=2,3,\dots \end{cases}$$

Θα λυθεί με την βοήθεια του μετασμού Laplace.

Έστω $\bar{q}_n(z)$ ο μετασμός Laplace της $q_n(t)$

Τότε $L\left(\frac{d}{dt} q_n(t)\right) = z \bar{q}_n(z) - q_n(0)$ (από ιδιότητα Laplace)

Επομένως προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} z \bar{q}_0(z) - q_0(0) = \mu \bar{q}_1(z) \\ z \bar{q}_1(z) - q_1(0) + (\lambda + \mu) \bar{q}_1(z) = \mu \bar{q}_2(z) \\ z \bar{q}_2(z) - q_2(0) + (\lambda + \mu) \bar{q}_2(z) = \mu \bar{q}_3(z) + \lambda \bar{q}_1(z) \\ \vdots \\ z \bar{q}_n(z) - q_n(0) + (\lambda + \mu) \bar{q}_n(z) = \mu \bar{q}_{n+1}(z) + \lambda \bar{q}_{n-1}(z) \end{cases}$$

$n=2,3,4,\dots$

Όμως $q_n(t) = P[j'(t) = n / j'(0) = 1]$

Επομένως για $t=0$ έχουμε ότι $q_1(0) = P[j'(0) = 1 / j'(0) = 1] = 1$

$q_n(0) = 0 \quad \forall n \neq 1$

Άρα:

$$\begin{cases} z \bar{q}_0(z) = \mu \bar{q}_1(z) \\ (z + \lambda + \mu) \bar{q}_1(z) = \mu \bar{q}_2(z) + 1 \\ (z + \lambda + \mu) \bar{q}_2(z) = \mu \bar{q}_3(z) + \lambda \bar{q}_1(z) \\ \vdots \\ (z + \lambda + \mu) \bar{q}_n(z) = \mu \bar{q}_{n+1}(z) + \lambda \bar{q}_{n-1}(z) \end{cases} \quad (*)$$

Από (*) $\mu \bar{q}_{n+1}(z) - (z+\lambda+\mu) \bar{q}_n(z) + \lambda \bar{q}_{n-1}(z) = 0$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$\mu x^2 - (z+\lambda+\mu)x + \lambda = 0$$

Τι μου θυμίζει?

Απο προηγ. μαθημα είχα αποδείξει ότι $\alpha(z), \beta(z)$
οι διακλινες ρίζες με $\beta(z) < \alpha(z)$

Τότε $0 < \beta(z) < 1 < \alpha(z)$

Έτσι $\bar{q}_n(z) = \Delta \alpha^n(z) + E \beta^n(z)$

Όμως επειδή $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n(t) = 1 \xrightarrow[\text{Laplace}]{\text{ιδιότητες}} \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{q}_n(z) = \frac{1}{z}$

Οπότε για να έχω $\Delta \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n(z) + E \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n(z) = \frac{1}{z}$

$L(1) = \frac{1}{z}$

θα πρέπει $\Delta = 0$

$\alpha(z) \beta(z) = \frac{\lambda}{\mu} > 0$

αίρα τότε:

$$\bar{q}_n(z) = E \beta^n(z)$$

Όμως ισχύει ότι: $(z+\lambda+\mu) \bar{q}_1(z) = \mu \bar{q}_2(z) + 1$

Επομένως $(z+\lambda+\mu) E \beta(z) = \mu E \beta^2(z) + 1$

$$\Rightarrow E = \frac{-1}{\mu \beta^2(z) - (z+\lambda+\mu) \beta(z)}$$

όπου $\beta(z)$ ρίζα του $\mu x^2 - (z+\lambda+\mu)x + \lambda$

Συνεπώς $\mu \beta''(z) - (z + \lambda + \mu) \beta(z) = -\lambda$

Άρα $E = \frac{1}{\lambda}$ και $\bar{q}_n(z) = \frac{\beta''(z)}{\lambda}$

Πλέον έχουμε προσδιορίσει την $\bar{q}_n(z)$, δηλ τον μετασμό Laplace της $q_n(t)$. Για προσδιορισμό της $q_n(t)$ απαιτείται η αντίστροφη της $\bar{q}_n(z)$ (είρεση μέσω χρήσης συνισσών Bessel.)

Ειδικότερα: $q_n(t) = \frac{n}{\lambda t} e^{n/2} e^{-(\lambda+\mu)t} I_n(2t\sqrt{\lambda\mu})$

Από όλα τα παραπάνω μπορούμε να βρούμε την:

$k(t) = \mu q_1(t)$

Μέσος χρόνος συνεχούς απασχόλησης.

Για προηγούμενα 1. Συμβολίσουμε με T την τ_μ που παριστάνει το χρόνο(περίοδο) συνεχούς απασχόλησης υπαλλήλου

2. Για την $\tau_\mu T$ (συνεχης) αποδείξαμε ότι η σπη $k(t) = \mu q_1(t)$

3. Για την $q_1(t)$ αποδείξαμε ότι έχει μετασμό Laplace

$\bar{q}_1(z) = \frac{\beta(z)}{\lambda}$

$\bar{q}_n(z) = E \beta''(z)$ με $E = \frac{1}{\lambda}$

Παίρνω παράγωγο.
 $\frac{d\bar{q}_1(z)}{dz} \Big|_{z=0} = -\int_0^{\infty} t q_1(t) dt$

Έχουμε αποδείξει $\bar{q}_n(z) = \frac{\beta''(z)}{\lambda}$.
όπου $\bar{q}_n(z)$ μετασμός Laplace $q_n(t)$
 $\bar{q}_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} q_1(t) dt$

$K(t) = \mu q_1(t)$

$ET = \int_0^{\infty} t \mu q_1(t) dt = \mu \int_0^{\infty} t q_1(t) dt$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την $ET = \int_0^{+\infty} t k(t) dt$

Σκέψη: Έστω $g(z)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $k(t)$

δηλ. $g(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} k(t) dt$

Τότε $\frac{dg(z)}{dz} = \int_0^{+\infty} -t e^{zt} k(t) dt$

$$\left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=0} = -ET$$

Συνεπώς $ET = - \left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=0}$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $k(t)$, δηλ. $g(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} k(t) dt$

όπως $k(t) = \mu q_1(t)$

άρα $g(z) = \mu \int_0^{+\infty} e^{-zt} q_1(t) dt \Rightarrow g(z) = \mu \bar{q}_1(z) \Rightarrow g(z) = \frac{\mu}{\lambda} \beta(z)$

Επομένως $ET = - \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{\mu}{\lambda} \beta(z) \right) \right|_{z=0}$

όπου $\beta(z)$ μικρότερη ρίζα.
του $\mu x^2 - (z + \lambda + \mu)x + \lambda = 0$.
(Το έχω δει αναλυτικά
στα προηγούμενα).

όπως $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
 $\rho < 1$ $- \frac{1}{\rho} \left. \frac{d}{dz} \beta(z) \right|_{z=0}$

ήταν $\beta(z)$ η μικρότερη ρίζα του $\mu x^2 - (z + \lambda + \mu)x + \lambda = 0$

δηλ. $\beta(z) = \frac{(z + \lambda + \mu) - \sqrt{(z + \lambda + \mu)^2 - 4\mu\lambda}}{2\mu}$

$$\frac{d\beta(z)}{dz} = \frac{1 - [(z+\lambda+\mu)^2 - 4\mu\lambda]^{-1/2}}{2\mu}$$

$$\left. \frac{d\beta(z)}{dz} \right|_{z=0} = \frac{1 - (\mu-\lambda)^{-1}(\mu+\lambda)}{2\mu}$$

$$\left. \frac{d\beta(z)}{dz} \right|_{z=0} = \frac{(\mu-\lambda) - (\mu+\lambda)}{2\mu(\mu-\lambda)} = \frac{-\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Επομένως $ET = \frac{\mu}{\lambda} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu-\lambda} \Rightarrow$

$$ET = \frac{1}{\mu(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \quad \rho < 1$$

Παρατήρηση Αν μας ζητούσε κάποιος να προσδιορίσουμε την $\text{Var} T$

$$\text{Var} T = ET^2 - (ET)^2$$

Άρα θα πρέπει να προσδιορίσουμε την ET^2

$$ET^2 = \int_0^{+\infty} t^2 k(t) dt$$

Υπενθύμιση $\frac{dg(z)}{dz} = \int_0^{+\infty} -t e^{-zt} k(t) dt$ όπου $g(z)$ ο μετασχηματισμός Laplace

της $k(t)$. Τότε $\frac{d^2 g(z)}{dz^2} = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-zt} k(t) dt$

Άρα $ET^2 = \left. \frac{d^2 g(z)}{dz^2} \right|_{z=0}$